die praktische Anwendung einiger Substanzen wäre zu sagen, daß auf Grund obiger Versuche der von HEYMER angegebene Abschwächer uns am geeignetsten erscheint. Bei ihm bleibt nicht nur die Emulsion erhalten, sondern auch das Schleierkorn ist sehr minimal und die Empfindlichkeit nahezu wieder 100%. Gründliches Nachwässern ist jedoch hierfür eine unablässige Voraussetzung.

Von den untersuchten Substanzen käme als weitere „Fadinglösung" wohl nur noch die heute hierfür am meisten benutzte „feuchte Luft" in Frage. Bei einigen 100 μ dicken Kernplatten dauert aber die Einwirkungszeit zu lange, um sämtliche Spuren — auch in der Tiefe — zu löschen. Es tritt dann die vermehrte Schleierbildung an der Oberfläche auf. Aus diesem und den oben genannten Gründen scheiden z. B. die anderen Substanzen aus. Ihre Einwirkungszeit kann nur teilweise max. 1 Min. betragen. Bei längeren Zeiten kann die Emulsion angegriffen und, wie zum Beispiel beim Blutlaugensalzabschwächer, undurchsichtig werden.

Dem Direktor des Physikalischen Instituts, Herrn Prof. Dr. GENTNER, möchte ich auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen für die Ermöglichung der Fertigstellung der Arbeit in seinem Institut. Besonders danke ich Herrn Prof. Dr. SCHMIDT für seine Unterstützung und wertvollen Ratschläge.

Die experimentellen Untersuchungen wurden im Institut für Mikrobiologie und experimentelle Therapie, Jena, durchgeführt. Dem Direktor dieses Institutes, Herrn Prof. Dr. KNÖLL, und Herrn Dr. POSSNER, der mich bei der Durchführung der Versuche unterstützte, möchte ich ebenfalls danken.

Entwicklungen von Coulomb-Wellenfunktionen für hohe Energien

Von D. GEISSLER

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut der Universität Leipzig

(Z. Naturforschg. **11 a**, 598—604 [1956]; eingegangen am 28. April 1956)

Es werden Entwicklungen der Funktionen F_L für kleine Werte von $\varrho = k\,r$ und der Funktionen F_0 und G_0 für große Werte von ϱ, die nach Potenzen von $\eta = Z\,Z'\,e^2/\hbar\,v$ fortschreiten, angegeben.

Die COULOMB-Wellenfunktionen sind Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y_L}{d\varrho^2} + \left\{1 - \frac{2\eta}{\varrho} - \frac{L(L+1)}{\varrho^2}\right\} y_L = 0\,. \tag{1}$$

Sie treten bei vielen physikalischen Problemen auf, insbesondere bei der Streuung von geladenen Teilchen aneinander. Die Bedeutung der Größen ist in diesem Falle:

$\varrho = k\,r$, $\eta = Z\,Z'\,e^2/\hbar\,v$, L = Drehimpulsquantenzahl der Relativbewegung; $k = \mu\,v/\hbar$, μ = reduzierte Masse, v = Relativgeschwindigkeit, r = Teilchenabstand, $Z\,e$ und $Z'\,e$ = Ladungen der beiden Teilchen.

Die beiden linear unabhängigen Lösungen von Gl. (1) werden so gewählt, daß

$$F_L(\varrho,\eta) = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = 0\,,$$

$$F_L(\varrho,\eta) \to \sin\left(\varrho - \eta \log 2\,\varrho - L\frac{\pi}{2} + \sigma_L\right) \equiv \sin\Theta_L \quad \text{für} \quad \varrho \to \infty \tag{2}$$

und

$$G_L(\varrho,\eta) \to \cos\Theta_L \quad \text{für} \quad \varrho \to \infty\,, \tag{3}$$

wobei $\sigma_L = \arg\Gamma(i\,\eta + L + 1)$ ist.

Es sind schon zahlreiche Arbeiten über Lösungsverfahren und Lösungen in verschiedenen Gebieten der $\varrho - \eta$-Ebene sowie eine Reihe von Zahlentafeln der Funktionen F_L, G_L, $dF_L/d\varrho$ und $dG_L/d\varrho$ erschienen [1]. Dabei fehlen Entwicklungen nach Potenzen von η, also Lösungen, die für hohe Energien und kleine Ladungen wichtig sind. Im folgenden wird versucht, diese Lücke zum Teil zu schließen, indem die F_L in eine für nicht zu große Werte von ϱ, F_0 und G_0 in eine für große Werte von ϱ brauchbare Potenzreihe in η entwickelt werden.

Die Beschränkung auf $L = 0$ ist keine wesentliche, da sich die Funktionswerte für $L \geqq 1$ aus denen für $L = 0$ mit Hilfe von Rekursionsformeln herleiten lassen. Ein praktisches Verfahren dazu ist von STEGUN und ABRAMOWITZ [2] angegeben worden.

[1] Eine Übersicht gibt FRÖBERG, Rev. Mod. Phys. **27**, 399 [1955].

[2] I. A. STEGUN u. M. ABRAMOWITZ, Phys. Rev. **98**, 1851 [1955].

1. Entwicklung von F_L nach Potenzen von η für kleine ϱ

Die regulären Lösungen von Gl. (1) mit der Eigenschaft (2) lassen sich mit Hilfe der konfluenten hypergeometrischen Funktion darstellen[3]:

$$F_L = C_L\, \varrho^{L+1}\, e^{i\varrho}\, F(L+1+i\eta,\, 2L+2;\, -2i\varrho)\,, \tag{4}$$

wobei

$$C_L = \frac{2^L}{(2L+1)!}\,[L^2+\eta^2]^{1/2}\,[(L-1)^2+\eta^2]^{1/2}\dots \cdot [1+\eta^2]^{1/2}\left(\frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta}-1}\right)^{1/2}, \tag{5}$$
$$C_0 = \left(\frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta}-1}\right)^{1/2}$$

und

$$F(\alpha,\beta;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n}\,\frac{z^n}{n!} \tag{6}$$

mit $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$, $(\alpha)_0 = 1$.

Es gilt zunächst, den Ausdruck $(\alpha)_n$ nach Potenzen von α zu ordnen. Das Ergebnis ist

$$(\alpha)_n = \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} \alpha^j \quad (n \geqq 1)\,, \tag{7}$$

wobei die Koeffizienten $A_j^{(n)}$ definiert sind durch

$$A_j^{(n)} = \sum_{\substack{1\\ k_1<k_2<\dots<k_{n-j}}}^{n-1} k_1 k_2 \dots k_{n-j} \quad (j \leqq n-1),$$
$$A_j^{(j)} = 1\,,\ A_j^{(n)} = 0\ (j>n)\,. \tag{8}$$

$j \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800	39916800
2		1	3	11	50	274	1764	13068	109584	1026576	10628640	120543840
3			1	6	35	225	1624	13132	118124	1172700	12753576	150917976
4				1	10	85	735	6769	67284	723680	8409500	105258076
5					1	15	175	1960	22449	269325	3416930	45995730
6						1	21	322	4536	63273	902055	13339535
7							1	28	546	9450	157773	2637558
8								1	36	870	18150	357423
9									1	45	1320	32670
10										1	55	1925
11											1	66
12												1

Tab. 1. Die Koeffizienten $A_j^{(n)}$, definiert durch die Gln. (8) bis (11), für $j, n = 0, 1, \dots, 12$.

Insbesondere ist

$$A_1^{(n)} = (n-1)! \quad (n \geqq 1)\,. \tag{9}$$

Aus der Definition (8) folgen ohne weiteres die Rekursionsformeln

$$A_j^{(n)} = A_{j-1}^{(n-1)} + (n-1)\, A_j^{(n-1)} \tag{10}$$

und die weiteren Eigenschaften

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} = n!\,,\quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^j A_j^{(n)} = 0\,. \tag{11}$$

Man kann die Sonderstellung von $(\alpha)_0 = 1$ beseitigen, indem man statt (7)

$$(\alpha)_n = \sum_{j=0}^{n} A_j^{(n)} \alpha^j \tag{12}$$

schreibt und

$$A_0^{(n)} = 0 \quad (n \geqq 1)\,,\quad A_0^{(0)} = 1$$

festsetzt.

Die Zahlenwerte der $A_j^{(n)}$ für $j, n = 0, 1, \dots, 12$ sind in Tab. 1 zu finden.

Für $\alpha = \mu + \lambda$ erhalten wir

$$\alpha^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \mu^k \lambda^{j-k}$$

und mit (12)

$$(\alpha)_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} A_j^{(n)} \mu^k \lambda^{j-k} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} A_j^{(n)} \mu^k \lambda^{j-k}$$

oder

$$(\alpha)_n = \sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)}(\lambda)\, \mu^k\,,$$
$$B_k^{(n)}(\lambda) = \sum_{j=k}^{n} A_j^{(n)} \binom{j}{k} \lambda^{j-k}\,. \tag{13}$$

Aus (6) und (13) folgt

$$F(\mu+\lambda,\beta;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\beta)_n\, n!} \sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)}(\lambda)\, \mu^k\,.$$

Da F eine ganze Funktion ist, dürfen wir umordnen:

$$F(\mu+\lambda,\beta;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \sum_{n=k}^{\infty} B_k^{(n)}(\lambda)\, \frac{z^n}{(\beta)_n\, n!}\,. \tag{14}$$

In unserem Fall gilt nach (4)

$$\lambda = L+1\,,\quad \mu = i\eta\,,\quad \beta = 2L+2\,,\quad z = -2i\varrho\,. \tag{15}$$

[3] Siehe z. B. Mott u. Massey, The Theory of Atomic Collisions, Oxford 1952, S. 53.

F_L, Gl. (4), ist reell[4], und deswegen können wir schreiben

$$F_L = C_L\, \varrho^{L+1}\, \mathrm{Re}\, F(L+1+i\,\eta, 2\,L+2; -2\,i\,\varrho)/\cos\varrho\,. \tag{16}$$

Indem wir (15) verwenden und aus (14) den Realteil bestimmen, ergibt sich schließlich nach einigen Umformungen

$$\mathrm{Re}\, F = \sum_{l=0}^{\infty} \eta^l \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, C_l^{(k)}(L+1)\ (2\,\varrho)^{2k+l}\,,$$
$$C_l^{(k)}(L+1) = \frac{B_l^{(2k+l)}(L+1)}{(2\,L+2)_{2k+l}\,(2\,k+l)\,!}\,. \tag{17}$$

(16) und (17) stellen das Endergebnis dar.

In Tab. 2 sind die Werte von $C_l^{(k)}$ (1) $[L=0]$ zusammengestellt, die zur Rechnung bis einschließlich $(2\,\varrho)^{11}$ nötig sind. Bei der Berechnung wurde die Tatsache verwendet, daß[5]

$$B_k^{(n)}(1) = A_{k+1}^{(n+1)}\,.$$

Man sieht, daß die Koeffizientenreihen für nicht zu große ϱ rasch konvergieren und ihre Summen dabei mit wachsendem l [Gl. (17)] schnell abnehmen.

2. Entwicklung von $F_0 + i\,G_0$ nach Potenzen von η für große ϱ

Wir gehen aus von der bekannten Integraldarstellung

$$F_0 + i\,G_0 = \frac{i\,e^{-i\varrho}}{C_0} \int_0^{\infty} t^{-i\eta}\,(t+2\,i\,\varrho)^{i\eta}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t\,,$$

wo C_0 in (5) definiert ist. Durch Entwickeln nach Potenzen von η folgt

$$F_0 + i\,G_0 = \frac{i\,e^{-i\varrho}}{C_0} \sum_{n=0}^{\infty} K_n(2\,\varrho)\ (i\,\eta)^n\,,$$
$$K_n(2\,\varrho) = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t} \left[\log\left(1 + \frac{2\,i\,\varrho}{t}\right)\right]^n \mathrm{d}t\,. \tag{18}$$

Durch Wechsel der Integrationsvariablen und Einführen der Bezeichnung $2\,\varrho = q$ erhalten wir

$$K_n(q) = \frac{q}{n!} \int_0^{\infty} e^{-q\,x} [\log(1-i\,x) - \log(-i\,x)]^n\, \mathrm{d}x\,. \tag{19}$$

$l \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1	1/6	1/120	1/5040	1/362880	1/39916800
1	1/2	11/144	137/43200	121/1881600	7129/9144576000	83711/13277924352000
2	1/6	7/576	29/64800	29531/3657830400	16103/182891520000	
3	1/24	17/17280	967/29030400	4523/8230118400	48821/8868372480000	
4	1/120	1/20736	1069/696729600	31063/1316818944000		
5	1/720	23/14515200	3013/62705664000	242537/347640201216000		
6	1/5040	13/348364800	683/627056640000			
7	1/40320	29/43893964800	10831/579400335360000			
8	1/362880	1/109734912000				
9	1/3628800	1/9932577177600				
10	1/39916800					

Tab. 2. Die Koeffizienten $C_l^{(k)}$ (1) $[L=0]$, definiert durch die Gln. (17) und (13), die zur Rechnung bis einschließlich $(2\,\varrho)^{11}$ nötig sind.

Zahlenbeispiel: $\eta = 0{,}1585$ und $\varrho = 0{,}4$

Eine physikalische Situation, die diesen Parameterwerten entspricht, ist z. B. Proton – Proton-Streuung bei 0,995 MeV (im Laborsystem) und einem Teilchenabstand von $r = 3{,}6 \cdot 10^{-13}$ cm.

Nach (17) und Tab. 2 berechnet man auf 5 Stellen

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\, F(1 + 0{,}1585\, i, 2;\ -0{,}8\, i)\\
&= 1\left(1 - \frac{1}{6}\cdot 0{,}64 + \frac{1}{120}\cdot 0{,}4096 - \frac{1}{5040}\cdot 0{,}26214\right)\\
&\quad + 0{,}15850\left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}8 - \frac{11}{144}\cdot 0{,}512 + \frac{137}{43200}\cdot 0{,}328\right)\\
&\quad + 0{,}02512\left(\frac{1}{6}\cdot 0{,}64 - \frac{7}{576}\cdot 0{,}4096\right)\\
&\quad + 0{,}00398\cdot \frac{1}{24}\cdot 0{,}512\\
&= 0{,}89669 + 0{,}05736 + 0{,}00256 + 0{,}00008\\
&= 0{,}95669.
\end{aligned}$$

Aus (5) ergibt sich $C_0 = 0{,}76380$ und damit nach (16)

$$F_0 = 0{,}3173\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
&\log(1-i\,x) - \log(-i\,x)\\
&= -\log x + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + i\left(-\operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned} \tag{20}$$

müssen die Potenzen von viergliedrigen Summen gebildet werden.

Es ist

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^n = \sum_z \frac{n!}{\alpha_1!\ \alpha_2!\ \alpha_3!\ \alpha_4!}$$
$$\cdot P_\alpha \left[a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} a_4^{\alpha_4}\right],\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = n\,. \tag{21}$$

Hierbei bedeuten

$\sum_z$: Summe über alle Zerlegungen der Zahl n in eine viergliedrige Summe der Zahlen 0, 1, ..., n, von denen

[4] Man sieht das sofort ein mit Hilfe der Formel
$$F(\alpha, \beta, z) = e^z\, F(\beta - \alpha, \beta, -z)\,.$$

[5] Der Beweis läßt sich mit Hilfe der Rekursionsformel (10) und der Eigenschaft (11) der $A_j^{(n)}$ führen.

jede auch mehrfach vorkommen kann. Die Anzahl solcher Zerlegungen ist gleich dem Koeffizienten von $x^n z^4$ in der Entwicklung des Ausdrucks

$$[(1-z)(1-x\,z)(1-x^2\,z)\ldots(1-x^n\,z)]^{-1}.$$

Die ersten Werte sind:

n	1	2	3	4	5	6
Zahl der Zerlegungen	1	2	3	5	6	9

$P_\alpha[\ldots]$: Summe über alle Permutationen der α_i, wo jeder Summand >0 und gleiche Permutationen nur einmal auftreten. Die Zahl der Summanden ist somit

$4! \quad = 24$ bei 0 gleichen unter den α_i,
$4!/2! \quad = 12$ bei 2 gleichen unter den α_i,
$4!/2!\,2! = 6$ bei 2-mal 2 gleichen unter den α_i,
$4!/3! \quad = 4$ bei 3 gleichen unter den α_i,
$4!/4! \quad = 1$ bei 4 gleichen unter den α_i.

Man erhält dann aus (19), (20) und (21)

$$K_n(q) = \frac{q}{n!}\sum_z \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\,\alpha_4!} \cdot P_\alpha[\nu(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\,K_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(q)] \qquad (22)$$

mit

$$\nu(\alpha_1,\ldots,\alpha_4) = (-1)^{\alpha_1+\alpha_3}(i)^{\alpha_3+\alpha_4}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha_4} = (-1)^{\alpha_1+\alpha_3}(i)^{\alpha_3+\alpha_4}\,\nu'(\alpha_2,\alpha_4)\,, \qquad (23\,\mathrm{a})$$

$$K_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(q) = \int_0^\infty e^{-q\,x}[\log x]^{\alpha_1}[\log(1+x^2)]^{\alpha_2}[\operatorname{arc\,tg} x]^{\alpha_3}. \qquad (23)$$

Die Werte von $\nu'(\alpha_2,\alpha_4) = (1/2)^{\alpha_2}(\pi/2)^{\alpha_4}$ für $\alpha_2, \alpha_4 = 0, 1, \ldots, 6$ sind in Tab. 3 verzeichnet.

$K_0(q)$ und $K_1(q)$ lassen sich geschlossen darstellen, nämlich

$$K_0(q) = 1\,, \qquad (22\,\mathrm{a})$$

$$K_1(q) = C + \log q - [\cos q\;\mathrm{Ci}\,q + \sin q\,\mathrm{si}\,q] + i[\pi/2 - \sin q\;\mathrm{Ci}\,q + \cos q\,\mathrm{si}\,q], \qquad (22\,\mathrm{b})$$

wo $C = 0{,}57721\,566\ldots$ die EULERsche Konstante bedeutet.

Explizit lauten die Summen (22) für $n=2{,}3$:

$$\begin{aligned}\frac{2!}{q}K_2(q) = {} & \nu(2000)\,K_{200} + \nu(0200)\,K_{020} \\ & + \nu(0020)\,K_{002} + \nu(0002)\,K_{000} \\ & + 2[\nu(1100)\,K_{110} + \nu(1010)\,K_{101} \\ & + \nu(1001)\,K_{100} + \nu(0110)\,K_{011} \\ & + \nu(0101)\,K_{010} + \nu(0011)\,K_{001}]\,,\end{aligned} \qquad (22\,\mathrm{c})$$

$$\begin{aligned}\frac{3!}{q}K_3(q) = {} & \nu(3000)\,K_{300} + \nu(0300)\,K_{030} \\ & + \nu(0030)\,K_{003} + \nu(0003)\,K_{000} \\ & + 3[\nu(2100)\,K_{210} + \nu(2010)\,K_{201} \\ & + \nu(2001)\,K_{200} + \nu(1200)\,K_{120} \\ & + \nu(1020)\,K_{102} + \nu(1002)\,K_{100} \\ & + \nu(0210)\,K_{021} + \nu(0201)\,K_{020} \\ & + \nu(0120)\,K_{012} + \nu(0102)\,K_{010} \\ & + \nu(0021)\,K_{002} + \nu(0012)\,K_{001}] \\ & + 6[\nu(1110)\,\mathrm{K}_{111} + \nu(1101)\,\mathrm{K}_{110} \\ & + \nu(1011)\,K_{101} + \nu(0111)\,K_{011}]\,.\end{aligned} \qquad (22\,\mathrm{d})$$

$K_4(q)$ besteht aus 35, $K_5(q)$ aus 56 und $K_6(q)$ aus 84 Summanden.

Bei der Ausrechnung der Integrale (23) beginnen wir mit

$$K_{\alpha_1 00}(q) \equiv H_{\alpha_1}(q)\,.$$

Es ist

$$H_{\alpha_1}(q) = \int_0^\infty e^{-q\,x}(\log x)^{\alpha_1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{q}\int_0^\infty e^{-t}(\log t - \log q)^{\alpha_1}\,\mathrm{d}t\,, \qquad (24)$$

also

$$H_{\alpha_1}(q) = \frac{1}{q}(A - \log q)^{\alpha_1}. \qquad (25)$$

Dies ist eine symbolische Schreibweise, in der A^k durch A_k mit

$$A_k \equiv H_k(1) = \int_0^\infty e^{-t}(\log t)^k\,\mathrm{d}t \qquad (26)$$

zu ersetzen ist. Die Werte von $A_0, A_1, \ldots, A_6$ sind aus Tab. 4 zu entnehmen, in der A_2 bis A_6 durch

$\alpha_2 \backslash \alpha_4$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1,57079 63268	2,46740 11003	3,87578 45850	6,08806 8190	9,56311 5150	15,02170 6149
1	0,5	0,78539 81634	1,23370 05501	1,93789 22925	3,04403 4095	4,78155 7575	7,51085 3075
2	0,25	0,39269 90817	0,61685 02751	0,96894 61463	1,52201 7047	2,39077 8787	3,75542 6537
3	0,125	0,19634 95408	0,30842 51375	0,48447 30731	0,76100 8524	1,19538 9394	1,87771 3269
4	0,0625	0,09817 47704	0,15421 25688	0,24223 65366	0,38050 4262	0,59769 4697	0,93885 6634
5	0,03125	0,04908 73852	0,07710 62844	0,12111 82683	0,19025 2131	0,29884 7348	0,46942 8317
6	0,015625	0,02454 36926	0,03855 31422	0,06055 91341	0,09512 6065	0,14942 3674	0,23471 4159

Tab. 3. Die Werte von $\nu'(\alpha_2,\alpha_4) = (1/2)^{\alpha_2}(\pi/2)^{\alpha_4}$ für $\alpha_2, \alpha_4 = 0, 1, \ldots, 6$.

numerische Integration von (26) bestimmt worden sind.

Alle übrigen Integrale der Form (23) werden asymptotisch ausgewertet, indem wir die Tatsache ausnutzen, daß für genügend große Werte von q sowohl $[\log(1+x^2)]^{\alpha_2}$ als auch $[\operatorname{arc\,tg} x]^{\alpha_3}$ in Potenzreihen entwickelt werden dürfen, die eigentlich nur für $x \leqq 1$ konvergieren. Wegen des Faktors e^{-qx} liefert der Integrand für $x > 1$ keine nennenswerten Beiträge mehr.

n	$A_n/n!$
0	+1
1	−0,57721 56649
2	+0,98905 5995
3	−0,90747 908
4	+0,98172 808
5	−0,98199 508
6	+0,99314 911

Tab. 4. Die Koeffizienten $A_n/n!$, definiert durch Gl. (26), für $n=0, 1, \ldots, 6$.

Auf diese Weise erhalten wir wegen

$$[\log(1+x^2)]^{\alpha_2} = \sum_{l=0} (-1)^l \, b_l^{(\alpha_2)} x^{2l+2\alpha_2}, \tag{27}$$

$$b_l^{(\alpha_2)} = \sum_{m=0}^{l} \frac{b_m^{(\alpha_2-1)}}{l-m+1}, \quad b_l^{(1)} = \frac{1}{l+1} \tag{28}$$

mit Hilfe der Formel

$$\int_0^\infty e^{-qx} x^n \, dx = \frac{n!}{q^{n+1}}$$

die asymptotische Reihe

$$K_{0\,\alpha_2\,0}(q) = \sum_{l=0} (-1)^l \, b_l^{(\alpha_2)} \frac{(2l+2\alpha_2)!}{q^{2l+2\alpha_2+1}}. \tag{29}$$

Ebenso folgt aus

$$[\operatorname{arc\,tg} x]^{\alpha_3} = \sum_{l=0} (-1)^l c_l^{(\alpha_3)} x^{2l+\alpha_3}, \tag{30}$$

$$c_l^{(\alpha_3)} = \sum_{m=0}^{l} \frac{c_m^{(\alpha_3-1)}}{2l-2m+1}, \quad c_l^{(1)} = \frac{1}{2l+1}. \tag{31}$$

die Entwicklung

$$K_{00\,\alpha_3}(q) = \sum_{l=0} (-1)^l c_l^{(\alpha_3)} \frac{(2l+\alpha_3)!}{q^{2l+\alpha_3+1}}. \tag{32}$$

Einige Koeffizienten $b_l^{(\alpha_2)}$ [Gl. (28)] und $c_l^{(\alpha_3)}$ [Gl. (31)] sind in den Tab. 5 und 6 ausgerechnet.

Schließlich ist

$$[\log(1+x^2)]^{\alpha_2} [\operatorname{arc\,tg} x]^{\alpha_3} = \sum_{l=0} (-1)^l d_l^{(\alpha_2,\alpha_3)} x^{2l+2\alpha_2+\alpha_3}, \tag{33}$$

$$d_l^{(\alpha_2,\alpha_3)} = \sum_{m=0}^{l} b_m^{(\alpha_2)} c_{l-m}^{(\alpha_3)} \tag{34}$$

und somit

$$K_{0\,\alpha_2\,\alpha_3}(q) = \sum_{l=0} (-1)^l d_l^{(\alpha_2,\alpha_3)} \frac{(2l+2\alpha_2+\alpha_3)!}{q^{2l+2\alpha_2+\alpha_3+1}}. \tag{35}$$

In Tab. 7 sind die ersten Koeffizienten $d_l^{(\alpha_2,\alpha_3)}$ [Gl. (34)] zusammengestellt.

Etwas umständlicher gestaltet sich die Berechnung der noch fehlenden Integrale (23) mit $\alpha_1 \neq 0$. Wir gehen aus von

$$\int_0^\infty e^{-qx} (\log x)^{\alpha_1} x^m \, dx = (-1)^m H_{\alpha_1}^{(m)}(q),$$

$$H_{\alpha_1}^{(m)}(q) \equiv \frac{d^m}{dq^m} H_{\alpha_1}(q), \tag{36}$$

l \ α_2	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1/2	1	3/2	2	5/2	3
2	1/3	11/12	7/4	17/6	25/6	23/4
3	1/4	5/6	15/8	7/2	35/6	9
4	1/5	137/180	29/15	967/240	1069/144	3013/240
5	1/6	7/10	469/240	89/20	285/32	781/48

Tab. 5. Die Koeffizienten $b_l^{(\alpha_3)}$, definiert durch Gl. (28), für $l=0, \ldots, 5$ und $\alpha_2=1, \ldots, 6$. In der l-ten Zeile ist die l-te Differenz const $=1/2^l$.

l \ α_3	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1/3	2/3	1	4/3	5/3	2
2	1/5	23/45	14/15	22/15	19/9	43/15
3	1/7	44/105	818/945	1436/945	457/189	680/189
4	1/9	563/1575	141/175	21757/14175	7474/2835	3982/945
5	1/11	3254/10395	13063/17325	11368/7425	261502/93555	147668/31185

Tab. 6. Die Koeffizienten $c_l^{(\alpha_3)}$, definiert durch Gl. (31), für $l=0, \ldots, 5$ und $\alpha_3=1, \ldots, 6$. In der l-ten Zeile ist die l-te Differenz const $=1/3^l$.

l	$\alpha_2 \backslash \alpha_3$	1	2	3	4	5
1	1	5/6	7/6	3/2	11/6	13/6
	2	4/3	5/3	2	7/3	
	3	11/6	13/6	5/2		
	4	7/3	8/3			
	5	17/6				
2	1	7/10	53/45	53/30	37/15	59/18
	2	29/20	377/180	57/20	223/60	
	3	49/20	587/180	251/60		
	4	37/10	421/90			
	5	26/5				
3	1	761/1260	289/252	7241/3780	11141/3780	3235/756
	2	1867/1260	748/315	2683/756	9529/1890	
	3	2437/840	3551/840	44533/7560		
	4	1571/315	4303/630			
	5	991/126				

Tab. 7. Einige Koeffizienten $d_l^{(\alpha_3,\alpha_3)}$, definiert durch Gl. (34), für $l=0, 1, 2, 3$ und $\alpha_2, \alpha_3=1, \ldots, 5$. Für festes l ist in den Zeilen jeweils die l-te Differenz const $=1/3^l$ und in den Spalten jeweils die l-te Differenz const $=1/2^l$. $l=0$: $d_0^{(\alpha_2, \alpha_3)}=1$.

was durch Differenzieren aus (24) folgt. Wie im Anhang gezeigt wird, gilt

$$H_{\alpha_1}^{(m)}(q) = \frac{(-1)^m}{q^m} G_{\alpha_1}^{(m)}(q) \tag{37}$$

mit

$$G_{\alpha_1}^{(m)}(q) = \alpha_1! \sum_{j=0}^{\mathrm{Min}(\alpha_1, m)} A_{j+1}^{(m+1)} \frac{H_{\alpha_1-j}(q)}{(\alpha_1-j)!}. \tag{37 a}$$

Dabei ist die Summe über j bis zu der kleineren der beiden Zahlen α_1 und m zu erstrecken und die Koeffizienten $A_{j+1}^{(m+1)}$ sind dieselben, die durch die Gln. (8) und (9) definiert und in Tab. 1 berechnet sind.

Aus (36) und (37) finden wir

$$\int_0^\infty e^{-qx} (\log x)^{\alpha_1} x^m \, \mathrm{d}x = \frac{1}{q^m} G_{\alpha_1}^{(m)}(q).$$

Indem wir dieses Ergebnis zusammen mit (27), (30) und (33) verwenden, erhalten wir

$$K_{\alpha_1 \alpha_2 0}(q) = \sum_{l=0} (-1)^l b_l^{(\alpha_2)} \frac{G_{\alpha_1}^{(2l+2\alpha_2)}(q)}{q^{2l+2\alpha_2}} \quad (\alpha_1, \alpha_2 \neq 0), \tag{38}$$

$$K_{\alpha_1 0 \alpha_3}(q) = \sum_{l=0} (-1)^l c_l^{(\alpha_3)} \frac{G_{\alpha_1}^{(2l+\alpha_3)}(q)}{q^{2l+\alpha_3}} \quad (\alpha_1, \alpha_3 \neq 0), \tag{39}$$

$$K_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(q) = \sum_{l=0} (-1)^l d_l^{(\alpha_2, \alpha_3)} \frac{G_{\alpha_1}^{(2l+2\alpha_2+\alpha_3)}(q)}{q^{2l+2\alpha_2+\alpha_3}} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0). \tag{40}$$

Damit sind alle auftretenden Integrale ausgewertet.

Die asymptotischen Reihen (29), (32), (35), (38), (39) und (40) sind abzubrechen, wenn die gewünschte numerische Genauigkeit erreicht ist oder bevor die Glieder dem Betrag nach wieder zu wachsen beginnen. Der dabei gemachte Fehler wird von der Größenordnung und vom Vorzeichen des ersten vernachlässigten Gliedes sein.

Wie Gl. (23) sofort zeigt, kommen die Hauptbeiträge von den Integralen $K_{\alpha_1 00}(q)$. Der dem Betrag nach größte Term in $K_n(q)$ ist der mit dem Faktor $K_{n00}(q)$. Eine Abschätzung der Größenordnung dieser Ausdrücke erscheint daher geboten. Es ist

$$K_{n00}(q) \equiv H_n(q) = \int_0^\infty e^{-qx} [\log x]^n \, \mathrm{d}x.$$

Für große q können wir die Beiträge von $x > 1$ vernachlässigen:

$$H_n(q) \approx \int_0^1 e^{-qx} (\log x)^n \, \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k q^k}{k!} \int_0^1 x^k (\log x)^n \, \mathrm{d}x$$

$$= (-1)^n n! \frac{1}{q} \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \frac{q^k}{k^n k!}.$$

Für genügend große n wird daraus (bei festem q)

$$H_n(q) \approx (-1)^n n!$$

Dies bedeutet, zusammen mit (22), daß die Reihe (18) wie eine geometrische konvergiert.

Zahlenbeispiel: $\eta = 0{,}01$ und $\varrho = 10$

Das entspricht einer Proton – Proton-Streuung bei 250 MeV (im Laborsystem) für Teilchenabstand $r = 0{,}815 \cdot 10^{-12}$ cm.

Nach (22 b) wird mit $q = 2\,\varrho = 20$:

$$K_1(20) = 3{,}575 + 1{,}521\, i.$$

Aus (22 c) sind die für $K_2(20)$ notwendigen $K_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ zu entnehmen. Sie werden so berechnet:

Nach (25) und Tab. 4:

$$H_0(20) \equiv K_{000}(20) = 0{,}0500;$$
$$H_1(20) \equiv K_{100}(20) = -0{,}1786;$$
$$H_2(20) \equiv K_{200}(20) = 0{,}6711.$$

Nach (32) und Tab. 6:

$$K_{001}(20) = 0{,}0025.$$

Nach (37 a) und Tab. 1:

$$G_1^{(1)}(20) = -0{,}1286.$$

Nach (39) und Tab. 6:

$$K_{101}(20) = -0{,}064.$$

Von den asymptotischen Entwicklungen in K_{001} und K_{101} braucht jeweils nur der erste Term genommen zu werden. Alle anderen in (22 c) vorkommenden $K_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ sind zu vernachlässigen, wenn F_0 und G_0 auf 4 Stellen nach dem Komma berechnet werden sollen.

Mit Hilfe von (23 a) und Tab. 3 bekommen wir $K_2(20) = 5{,}6 + 5{,}5\,i$.

Der Hauptterm in $K_3(20)$ [Gl. (22 d)] ist $K_{300}(20) \approx -3$, so daß wir die Entwicklung (18) bei unserer Genauigkeit nach $n = 2$ abbrechen können. Dann wird

$$\sum_{n=0} K_n(20)\,(0{,}01\,i)^n = 0{,}98424 + 0{,}03520\,i\,.$$

Aus (5) folgt $C_0 = 0{,}98433$ und damit schließlich nach Gl. (18)

$$F_0 = -0{,}5139\,,\quad G_0 = -0{,}8584\,.$$

Anhang

Nach Gl. (25) gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} H_n(q) \equiv H_n^{(1)}(q) = -\frac{1}{q} H_n(q) - \frac{n}{q^2}(A - \log q)^{n-1}$$
$$= -\frac{1}{q}(H_n + n\,H_{n-1}).$$

Durch fortgesetztes Differenzieren und Anwenden von (25) erhalten wir

$$H_n^{(m)}(q) = \frac{(-1)^m}{q^m}\, n! \sum_{j=0}^{m} a_j^{(m)} \frac{H_{n-j}(q)}{(n-j)!} \qquad \text{(A. 1 a)}$$

$$(H_n \equiv 0 \text{ für } n < 0)$$

$$= \frac{(-1)^m}{q^m}\, n! \sum_{j=0}^{n} a_j^{(m)} \frac{H_{n-j}(q)}{(n-j)!} \qquad \text{(A. 1 b)}$$

$$\left(a_j^{(m)} = 0 \text{ für } j > m\right).$$

Die Koeffizienten $a_j^{(m)}$ bestimmen wir durch vollständige Induktion nach m. Die Gln. (A. 1 a) und (A. 1 b) gelten für $m = 0$ ($H_n = H_n$) und für $m = 1$ [hier ist das Resultat Gl. (25), wenn $a_0^{(1)} = a_1^{(1)} = 1$ gewählt wird]. Nehmen wir an, daß sie für m richtig sind, dann folgt durch Differenzieren und Anwendung von (25)

$$H_n^{(m+1)}(q) = \frac{(-1)^{m+1}\,n!}{q^{m+1}} \left\{ m \sum_{j=0}^{m} a_j^{(m)} \frac{H_{n-j}(q)}{(n-j)!} + \sum_{j=0}^{m} a_j^{(m)} \frac{1}{(n-j)!} [H_{n-j}(q) + (n-j)\,H_{n-j-1}(q)] \right\}$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}\,n!}{q^{m+1}} \left\{ \sum_{j=0}^{m+1} (m+1)\, a_j^{(m)} \frac{H_{n-j}(q)}{(n-j)!} + \sum_{j=0}^{m+1} a_{j-1}^{(m)} \frac{H_{n-j}(q)}{(n-j)!} \right\}$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}\,n!}{q^{m+1}} \sum_{j=0}^{m+1} \left[a_{j-1}^{(m)} + (m+1)\, a_j^{(m)}\right] \frac{H_{n-j}(q)}{(n-j)!}\,.$$

Durch Vergleich mit (A. 1 a) ergibt sich die Rekursionsformel

$$a_j^{(m+1)} = a_{j-1}^{(m)} + (m+1)\, a_j^{(m)}\,,$$

die zusammen mit $a_j^{(m)} = 0$ für $j > m$ und $a_0^{(m)} = m!$ die $a_j^{(m)}$ vollständig bestimmt. Insbesondere wird $a_j^{(j)} = 1$. Vergleicht man diese Eigenschaften der $a_j^{(m)}$ mit denen der $A_j^{(m)}$ [Gln. (8), (9) und (10)], so findet man $a_j^{(m)} = A_{j+1}^{(m+1)}$. Damit wird aus (A. 1 a) und (A. 1 b):

$$H_n^{(m)}(q) = \frac{(-1)^m}{q^m} G_n^{(m)}(q),$$

$$G_n^{(m)}(q) = n! \sum_{j=0}^{\mathrm{Min}(n,m)} A_{j+1}^{(m+1)} \frac{H_{n-j}(q)}{(n-j)!}\,.$$

NOTIZEN

Der außergewöhnliche Anstieg der kosmischen Ultrastrahlung am 23. Februar 1956

(2. Mitteilung)

Von A. Sittkus

Physikalisches Institut der Universität Freiburg i. Br.

(Z. Naturforschg. 11 a, 604—606 [1956]; eingegangen am 25. April 1956)

In einer 1. Mitteilung[1] wurde über die Beobachtung der Ultrastrahlungseruption vom 23. 2. 1956 in Freiburg (48° N 8° E) berichtet, die annähernd mit einer großen chromosphärischen Eruption auf der Sonne zusammenfiel. Aus den Registrierungen der 60 l-Ionisationskammer auf dem Schauinsland in 1200 m Höhe und den Messungen mit der 500 l-Kammer in Freiburg (240 m) ergab sich als erster erkennbarer Beginn der Eruption der Zeitpunkt 03.42 WZ. Der zeitliche Verlauf der Intensitätserhöhung folgt dabei annähernd einem Exponentialgesetz. Die Zunahme erfolgt zunächst langsam und beträgt um 03.44 WZ 10%. Sie wird danach

[1] A. Sittkus, W. Kühn u. E. Andrich, Z. Naturforschg. 11 a, 325 [1956].